

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА  
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА



---

---

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ  
ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2015  
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ  
ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

---

---

*Задачи подготовил:*

**Филиппов Юрий Петрович,**  
научный руководитель школы,  
старший преподаватель кафедры  
общей и теоретической физики  
Самарского государственного  
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2015 г.

## Уровень «Новичок» (уровень А)

### Задача № 1. «Сокровища звездного неба»

На представленной ниже фотографии (см. рис. 1) участка звездного неба идентифицируйте созвездия, полностью попавшие в кадр. Назовите собственные имена пяти наиболее ярких звезд кадра и укажите их положение на бумажной копии фотографии. (1 балл за каждый правильно названный объект).



Рис. 1: фотография участка звездного неба.

#### Решение:

Для идентификации созвездий необходимо провести детальное сравнение фотографии с картой звездного неба. Это легко реализовать с помощью виртуального планетария Stellarium. На рис. 2 представлен участок неба, отображенный на фотографии (рис. 1) и симулированный с помощью данной программы. Из сравнения рис. 1 и 2 очевидно, что созвездиями полностью попавшими в кадр являются Орион, Большой Пес, Голубь, Заяц.

С помощью той же программы легко установить, что наиболее яркими звездами здесь являются Сириус ( $\alpha$  Большого Пса,  $-1.45^m$ ), Ригель ( $\beta$  Ориона,  $0.15^m$ ), Бетельгейзе ( $\alpha$  Ориона,  $0.45^m$ ), Адхара ( $\epsilon$  Большого Пса,  $+1.50^m$ ), Беллатрикс ( $\gamma$  Ориона,  $1.60^m$ ). Отметим, что шестое место в данном рейтинге занимает Альнилам ( $\epsilon$  Ориона,  $1.65^m$ ).



Рис. 2: симуляция данного участка звездного неба в программе Stellarium.

**Ответ:** 1) Орион, Большой Пес, Голубь, Заяц; 2) Сириус ( $\alpha$  Большого Пса,  $-1.45^m$ ), Ригель ( $\beta$  Ориона,  $0.15^m$ ), Бетельгейзе ( $\alpha$  Ориона,  $0.45^m$ ), Адхара ( $\varepsilon$  Большого Пса,  $+1.50^m$ ), Беллатрикс ( $\gamma$  Ориона,  $1.60^m$ ). ( $S_{\max} = 9$  баллов).

### Задача № 2. «Сближение с Нептуном 25 лет спустя»

**Условие.** 25 августа 2014 года космический аппарат (КА) «Новые горизонты» (New Horizons, NASA, USA) прошел точку орбиты Нептуна – ледяной планеты-гиганта, самой удаленной от Солнца классической планеты. Планета в этот момент находилась вблизи противостояния. Указанная точка орбиты Нептуна расположена на гелиоцентрическом расстоянии, равном  $r_{gc} = 4.02$  млрд. км. Оцените минимальное время, в течение которого сигнал, испущенный аппаратом, достигнет орбиты Земли (в расчетах следует считать, что орбиты Земли и Нептуна лежат в одной плоскости). Следует отметить, что данное событие знаменательно тем, что ровно 25 лет назад, 25 августа 1989 года, с Нептуном сблизился другой КА – «Вояджер-2» (Voyager 2, NASA, USA) который двигался в сторону внешней границы Солнечной системы и который стал первым в истории космическим аппаратом, побывавшим в окрестности Нептуна. Во сколько раз расстояние, пройденное радиосигналом к указанному моменту (25.08.2014), испущенным с борта Вояджера-2, 25 лет тому назад, больше расстояния  $r_{gc}$ ? (3 балла).

#### Дано:

$$r_{gc} = 4.02 \text{ млрд. км.}$$

#### Найти:

$$\Delta t_{\min}, rV/r_{gc} - ?$$

#### Решение:

Как известно, свет распространяется в пустоте (вакууме) с постоянной скоростью, равной  $c = 299792458 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Следовательно минимальное время, в течение которого сигнал, испущенный аппаратом, достигнет орбиты Земли можно определить так

$$\Delta t_{\min} = \frac{\Delta_{\min}}{c}$$

здесь  $\Delta_{\min}$  – минимальное геоцентрическое расстояние Нептуна. Очевидно, что оно будет минимально возможным, когда Солнце, Земля и Нептун будут находиться на одной прямой. Полагая, что орбита Земли есть окружность с радиусом  $a_{\oplus} = 0.15$  млрд. км, то

$$\Delta_{\min} = r_{gc} - a_{\oplus} = 3.87 \text{ млрд. км.}$$

В результате  $\Delta t_{\min} = 12900 \text{ с} = 3 \text{ ч } 35 \text{ мин.}$

Вычислим путь, пройденный радиосигналом к указанному моменту (25.08.2014), испущенным с борта Вояджера-2, 25 лет тому назад:

$$r_V = c \cdot t_V = 25 \text{ св.лет} = 2.365 \cdot 10^{14} \text{ км.}$$

здесь мы учли, что  $1 \text{ св. год} = 9.461 \cdot 10^{12} \text{ км.}$  Тогда

$$\frac{r_V}{r_{gc}} = 5.88 \cdot 10^4.$$

**Ответ:**  $\Delta t_{\min} = 12900 \text{ с} = 3 \text{ ч } 35 \text{ мин}; r_V/r_{gc} = 5.88 \cdot 10^4$ . ( $\$_{\max} = 3$  балла).

### Задача № 3. «Соединение Венеры и Марса»

**Условие.** Однажды Венера вступила в тесное соединение с Марсом. У какой из двух планет в этом момент угловой диаметр видимого диска будет больше? Ответ поясните. (3 балла).

#### Решение:

**Соединение астрономических тел** – это конфигурация данных небесных тел, при которой, в результате собственного движения, они проецируются в две близкие точки на небесной сфере. В этой конфигурации, как правило, их эклиптические долготы равны. Важно отметить, что момент соединения не обязательно совпадает с моментом максимального сближения данных тел.

Как известно, угловой диаметр видимого диска планеты можно определить по формуле:

$$D'' = \frac{D}{\Delta} \times 206265'', \quad (1)$$

где  $D$  – линейный диаметр планеты,  $\Delta$  – геоцентрическое расстояние до планеты.

Как известно, Венеру всегда можно наблюдать лишь вблизи Солнца. Следовательно, чтобы соединение планет имело место, Марс должен находиться в окрестности своего соединения с Солнцем (должен "уйти за Солнце"). Тогда расстояние до Марса  $\Delta_M \approx 2.5 \text{ а.е.}$ , а до Венеры расстояние  $\Delta_V \leq 1.72 \text{ а.е.}$  Диаметр Венеры  $D_V = 12103 \text{ км}$ , а у Марса –  $D_M = 6792 \text{ км}$ . Из приведенных значений следует, что

$$D''_M < D''_V.$$

**Ответ:** у Венеры угловой диаметр видимого диска будет больше. ( $\$_{\max} = 3$  балла).

### Задача № 4. «Фотография участка звездного неба и направление на полюс мира»

**Условие.** На рис. 3 представлена фотография участка звездного неба, полученная известным астрофотографом Дж. Чумаком (John Chumack). Используя бумажную копию данной фотографии, укажите на последней направление на северный полюс мира. (4 балла).

#### Решение:



Рис. 3: фотография участка звездного неба, полученная астрофотографом Дж. Чумаком (John Chumack).

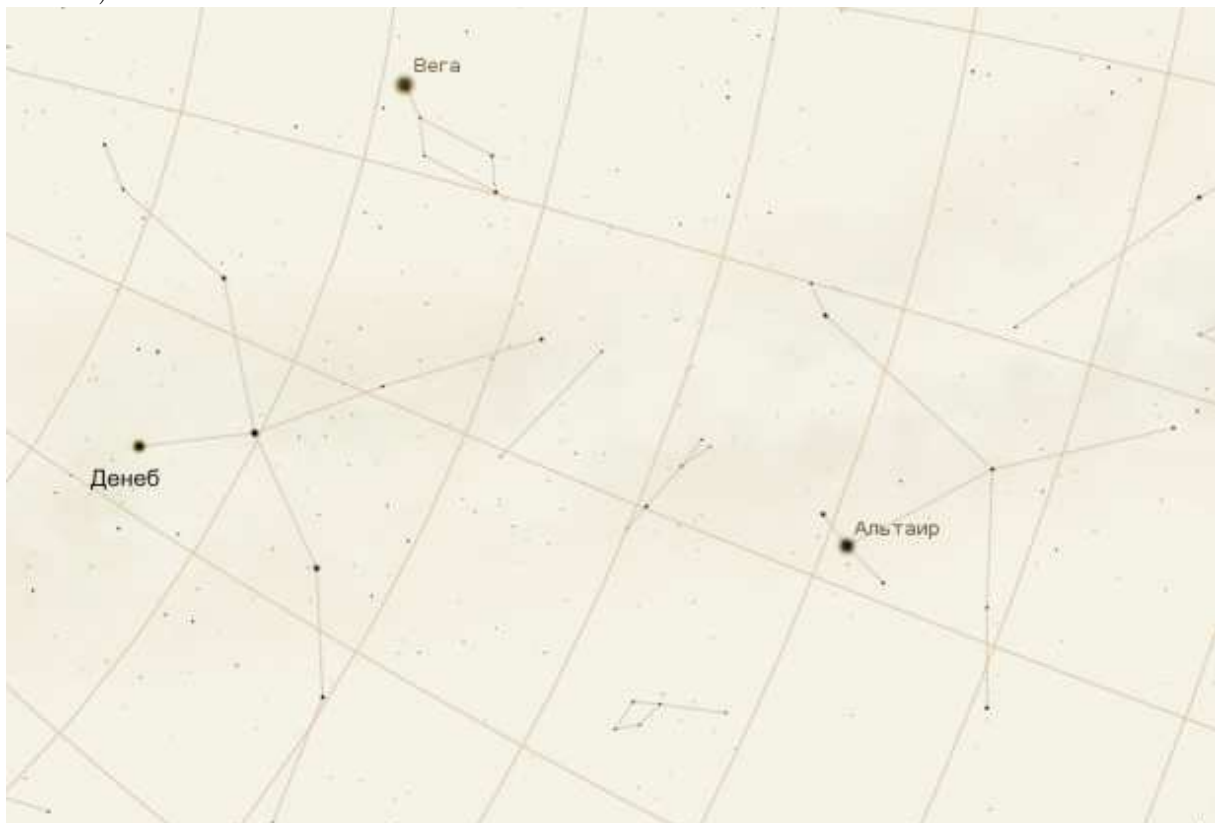


Рис. 4: симуляция участка неба с летним треугольником.

На представленной фотографии запечатлен участок звездного неба, содержащий известный астеризм – *летне-осенний треугольник* – вершины которого образуют самые яркие звезды созвездий Лиры, Лебеда и Орла, а именно Вега ( $\alpha$  Лиры), Денеб ( $\alpha$  Лебеда) и Альтаир ( $\alpha$  Орла), см. рис. 4.

По картам звездного неба легко выявить, что Вега и Денеб обладают существенно большими

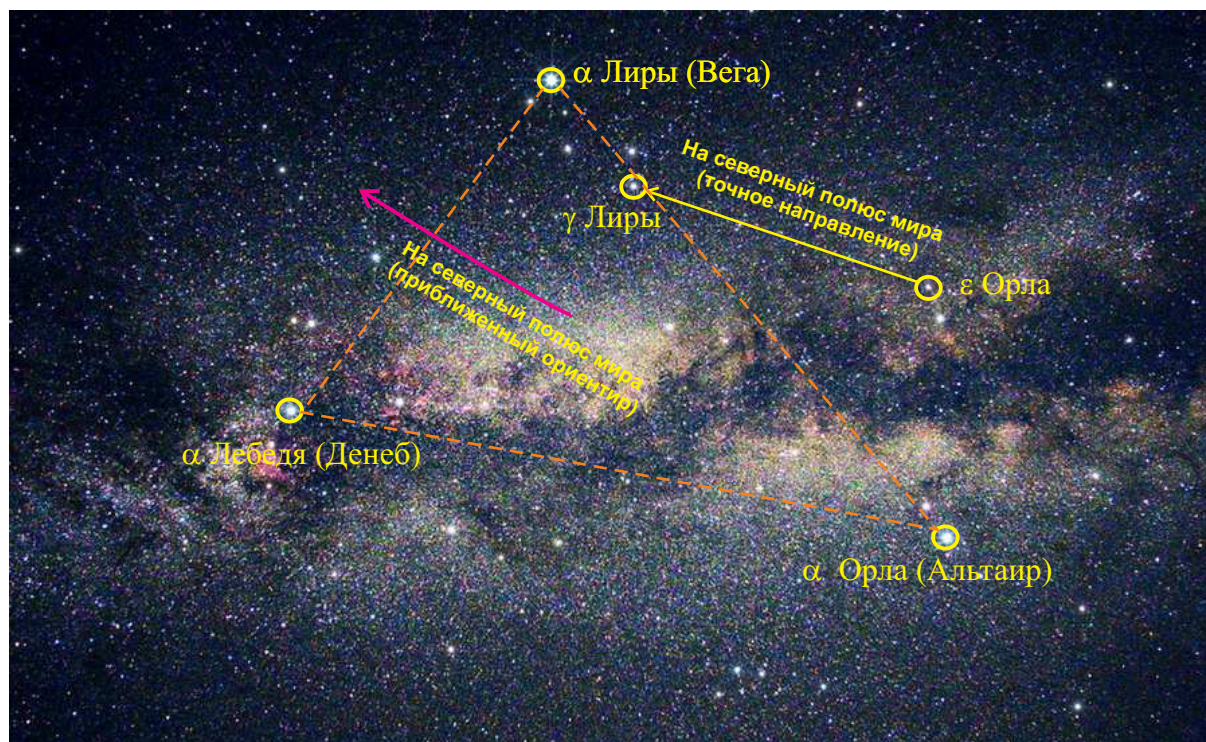


Рис. 5: фотография участка звездного неба с указанием направления на северный полюс мира.

склонениями ( $\delta_D = +39^\circ$  и  $\delta_V = +45^\circ$  соответственно), нежели Альтаир ( $\delta_A = +9^\circ$ ) и потому расположены они ближе к северному полюсу мира. Исходя уже из этих фактов можно задать приближенный ориентир на северный полюс мира (см. рис. 5).

Для определения точного направления на данную точку небосвода, заметим, что две звезды –  $\gamma$  Лиры и  $\epsilon$  Орла расположены на одном круге склонения (см. рис. 4), причем круги склонения сходятся в направлении " $\gamma$  Лиры  $\rightarrow$   $\epsilon$  Орла", поэтому в этом же направлении должен быть расположен северный полюс мира (см. рис. 5). ( $S_{\max} = 4$  балла).

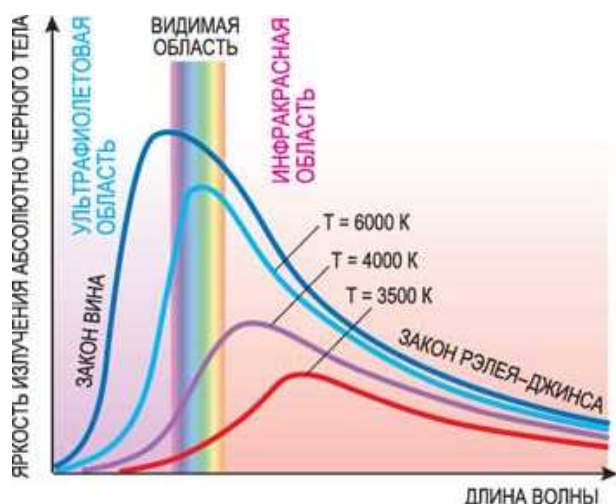


Рис. 6: Распределение энергии в спектрах звезд с различной эффективной температурой поверхности.

звезда В на  $0.1^m$  ярче, чем звезда А, значит она в голубых лучах излучает больше энергии, а следовательно ее температура выше, т.е.

$$T_A < T_B.$$

**Ответ:**  $T_A < T_B$ . ( $S_{\max} = 4$  балла).

### Задача № 5. «Какая звезда горячее?»

**Условие.** В красных лучах звезды А и В светят одинаково, а в голубых лучах звезда В на  $0.1^m$  ярче, чем звезда А. Какая из звезд имеет более высокую температуру поверхности? (4 балла).

#### **Решение:**

Распределение энергии в спектре звезды в первом приближении описывается законом (формулой) Планка, т.е. звезда излучает как абсолютно черное тело. На рис. 6 приведены кривые Планка (для спектральных плотностей потоков) для звезд с различными эффективными температурами. Из рисунка видно, что чем больше поток излучения (выше расположена кривая) в голубых лучах, тем температура звезды выше. Поскольку в голубых лучах звезда В на  $0.1^m$  ярче, чем звезда А, значит она в голубых лучах излучает больше энергии, а следовательно ее температура выше, т.е.

**Задача № 6. «Желтый гипергигант и карлик»**

**Условие.** Во сколько раз звезда-гипергигант  $\rho$  Кассиопеи со светимостью  $L_* = 5.5 \cdot 10^5 L_\odot$  (здесь  $L_\odot$  – светимость Солнца) больше, чем звезда главной последовательности –  $\beta$  Гончих Псов ( $L = 1.2 L_\odot$ ), если их температуры одинаковы и равны  $T_* = 6000^\circ$ ? (5 баллов).

<b>Дано:</b> $L_* = 5.5 \cdot 10^5 L_\odot$ , $L = 1.2 L_\odot$ , $T_* = 6000^\circ$ .	<b>Решение:</b> Запишем формулы для светимостей данных звезд $L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_*^4, \quad L = 4\pi R^2 \sigma T_*^4,$ здесь $R_*, R$ – радиусы звезд, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> ) – постоянная Стефана-Больцмана.
<b>Найти:</b> $R_*/R$ – ?	

Поделим одно уравнение на другое, в результате получаем:

$$\frac{L_*}{L} = \left(\frac{R_*}{R}\right)^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{R_*}{R} = \sqrt{\frac{L_*}{L}} = 677.$$

Т.о. гипергигант в 677 раз больше звезды главной последовательности.

**Ответ:**  $R_*/R = \sqrt{L_*/L} = 677$ . ( $S_{\max} = 5$  баллов).

**Уровень «Знаток» (уровень В)****Задача № 7. «Мощные гейзеры Европы»**

**Условие.** В декабре 2013 года учеными из Юго-Западного университета в Сан-Антонио (США) были впервые представлены доказательства существования водяных гейзеров, бьющих из трещин ледяной коры Европы (спутника Юпитера) недалеко от ее южного полюса. Открытие сделано по результатам анализа снимков телескопа Хаббла в оптическом и ультрафиолетовом диапазонах, полученных в декабре 2012 года. Установлено, что гейзеры поднимаются на высоту 200 км от поверхности, после чего их материал в связи со значительной массой Европы ( $\mathcal{M}_E = 4.802 \cdot 10^{22}$  кг) выпадает обратно на поверхность спутника, радиус которого  $\mathcal{R}_E = 1561.2$  км. Интенсивность биения гейзеров является переменной и зависит от приливной активности со стороны Юпитера, усиливаясь при отдалении Европы от газового гиганта, и ослабевая при приближении к нему. Определите начальную скорость вырывающихся из трещин потоков воды, и оцените эффективную площадь этих трещин, если суммарный поток гейзеров Европы, по оценке специалистов, равен 5 тонн в секунду. (6 баллов).

<b>Дано:</b> $\mathcal{M}_E = 4.802 \cdot 10^{22}$ кг, $\mathcal{R}_E = 1561.2$ км, $h = 2 \cdot 10^5$ м, $\mu = 5 \cdot 10^3$ кг/с.	<b>Решение:</b> Для определения начальной скорости вырывающихся водных масс воспользуемся законом сохранения механической энергии: запишем его для порции воды массы $\Delta m$ у поверхности Европы и на высоте $h$ : $\frac{\Delta m V_0^2}{2} - \frac{G \Delta m \mathcal{M}_E}{\mathcal{R}_E} = -\frac{G \Delta m \mathcal{M}_E}{(\mathcal{R}_E + h)}, \quad (2)$ здесь первое слагаемое в левой части уравнения определяет кинетическую энергию данной порции, второе – потенциальную энергию гравитационного взаимодействия данной порции с Европой. Откуда следует
<b>Найти:</b> $V_0, S_{\text{eff}}$ – ?	$V_0 = \sqrt{\frac{2 G \mathcal{M}_E}{(\mathcal{R}_E + h)} \left(\frac{h}{\mathcal{R}_E}\right)} = 683 \text{ м/с} = 0.683 \text{ км/с}. \quad (3)$

здесь  $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup> – универсальная гравитационная постоянная.

По определению, *поток массы* есть отношение массы ( $\Delta m$ ) воды, выносимой на поверхность спутника за время  $\Delta t$ , к величине данного промежутка:

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (4)$$

Поскольку вода вырывается из недр с огромной скоростью, она порождает «столб воды». Последний можно моделировать цилиндром с высотой  $\Delta h$  и площадью  $S_{\text{eff}}$ , тогда его объем есть

$$V_c = S_{\text{eff}} \Delta h = S_{\text{eff}} V_0 \Delta t.$$

Учитывая, что массу порции воды можно представить в виде

$$\Delta m = \rho_w V_c,$$

в итоге поток массы воды представляется как

$$\mu = \rho_w S_{\text{eff}} V_0, \Rightarrow S_{\text{eff}} = \frac{\mu}{\rho_w V_0} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ кг/с}}{10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 683 \text{ м/с}} = 7.3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \quad (5)$$

Интересно отметить, что эффективная площадь этих трещин равна по сути площади квадрата со стороной 8.5 см.

**Ответ:**  $V_0 = \sqrt{\frac{2G M_E}{(R_E + h)} \left(\frac{h}{R_E}\right)} = 0.683 \text{ км/с}, S_{\text{eff}} = \mu / (\rho_w V_0) = 7.3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \quad (6 \text{ баллов}).$

### Задача № 8. «Наибольшая элонгация Венеры»

**Условие.** Как известно, орбита Земли характеризуется большой полуосью  $a_{\oplus} = 1.0000$  а.е. и эксцентриситетом  $\varepsilon_{\oplus} = 0.0167$ . Соответствующие значения орбитальных параметров Венеры есть  $a_{\ominus} = 0.7233$  а.е.,  $\varepsilon_{\ominus} = 0.0068$ . Определите по этим данным минимальное и максимальное возможные значения наибольшей элонгации Венеры. В расчетах пренебречь наклонением орбиты Венеры к плоскости эклиптики. (7 баллов).

#### Дано:

$$\begin{aligned} a_{\oplus} &= 1.0000 \text{ а.е.}, \\ \varepsilon_{\oplus} &= 0.0167, \\ a_{\ominus} &= 0.7233 \text{ а.е.}, \\ \varepsilon_{\ominus} &= 0.0068. \end{aligned}$$

#### Найти:

$$\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}} - ?$$

#### Решение:

Под *элонгацией* в астрономии (в общем случае) понимается угловое расстояние между двумя светилами. Поскольку Венера – внутренняя планета, ее орбита лежит внутри орбиты Земли, то ее элонгация не может больше некоторого предельного значения  $\alpha$ . Данное значение достигается в случае, когда угол между направлениями на Солнце и на Землю (если смотреть из центра Венеры) будет равен  $90^\circ$  (см. рис. 7.а). Следовательно, треугольник  $\triangle SVE$ , составленный из Солнца, Венеры и Земли будет прямоугольным. Для последнего легко определить синус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{r_V}{r_{\oplus}}, \Rightarrow \alpha = \arcsin \left( \frac{r_V}{r_{\oplus}} \right). \quad (6)$$

где  $r_V, r_{\oplus}$  – гелиоцентрические расстояния до Венеры и Земли соответственно.

На интервале  $(0, \pi/2)$  функция "синус" есть монотонно возрастающая функция, следовательно большему значению отношения  $r_V/r_{\oplus}$  соответствует большее значение аргумента  $\alpha$ .

Угол  $\alpha$  будет принимать максимальное значение, когда числитель дроби ( $r_V$ ) будет максимален (что отвечает пребыванию Венеры в афелии своей орбиты), а знаменатель ( $r_{\oplus}$ ) будет минимальным (что отвечает пребыванию Земли в перигелии своей орбиты), т.е.

$$\alpha_{\text{max}} = \arcsin \left( \frac{r_V^{(\text{max})}}{r_{\oplus}^{(\text{min})}} \right) = \arcsin \left( \frac{a_{\ominus}(1 + \varepsilon_{\ominus})}{a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus})} \right) = 47^\circ 47'.$$



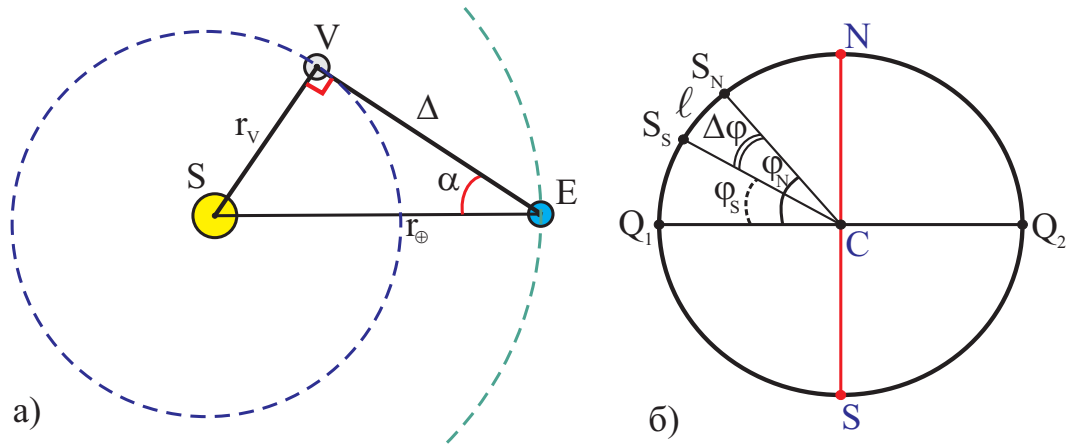


Рис. 7: К определению величины наибольшей элонгации.

Угол  $\alpha$  будет принимать минимальное значение, когда числитель дроби ( $r_V$ ) будет минимален (что отвечает пребыванию Венеры в перигелии своей орбиты), а знаменатель ( $r_\oplus$ ) будет максимальным (что отвечает пребыванию Земли в афелии своей орбиты), т.е.

$$\alpha_{\min} = \arcsin \left( \frac{r_V^{(\min)}}{r_\oplus^{(\max)}} \right) = \arcsin \left( \frac{a_\oplus(1 - \varepsilon_\oplus)}{a_\oplus(1 + \varepsilon_\oplus)} \right) = 44^\circ 57'.$$

**Ответ:**  $\alpha_{\max} = \arcsin \left( \frac{a_\oplus(1 + \varepsilon_\oplus)}{a_\oplus(1 - \varepsilon_\oplus)} \right) = 47^\circ 47'$ ,  $\alpha_{\min} = \arcsin \left( \frac{a_\oplus(1 - \varepsilon_\oplus)}{a_\oplus(1 + \varepsilon_\oplus)} \right) = 44^\circ 57'$ . (7 баллов).

**Задача № 9. «Географические особенности Самарской области»**

Как известно, Самарская область занимает территорию с площадью 53.6 тыс. км<sup>2</sup>. Область протянулась с запада на восток на 315 км. Самая восточная точка данной области определяется географической долготой – 52°35'. Определите

- а) какую долю (в процентах) составляет от площади всей территории РФ ( $S_{RF} = 17125.187$  тыс. км<sup>2</sup>), площадь территории Самарской области?
- б) долготу самой западной точки области. В расчетах следует полагать, что Земля есть шар радиуса  $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$  км, широта г. Самара –  $\varphi_S = 53^\circ 12'$ .
- в) На сколько отличаются моменты наступления Нового года для жителей Самарской области, находящихся в самой восточной и самой западной точках области?
- г) В какой из этих двух точек продолжительность дня 23 сентября будет больше? А 21 марта? Ответ поясните. (8 баллов).

**Дано:**

$S_s = 53.6$  тыс. км<sup>2</sup>,  
 $\lambda_E = 52^\circ 35'$ ,  
 $\ell = 315$  км,  
 $S_{RF} = 17125.187$   
 тыс. км<sup>2</sup>,  
 $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$  км,  
 $\varphi_S = 53^\circ 12'$ .

**Найти:**

$\eta, \lambda_W - ?$   
 $\Delta T_{NY}, \tau_{day} - ?$

**Решение:**

а) Определим долю (в процентах), которую составляет от площади всей территории РФ площадь территории Самарской области:

$$\eta = \frac{S_s}{S_{RF}} \times 100\% = 0.31\%. \quad (7)$$

б) Для определения долготы самой западной точки области, вычислим прежде разность долгот  $\Delta\lambda = \lambda_E - \lambda_W$ . Для этого заметим, что длина основного круга широты, на котором находится Самарская область, согласно рис. 8, есть

$$L = 2\pi r_S = 2\pi \mathfrak{R}_\oplus \cos \varphi_S.$$

Составим пропорцию: длине  $\ell$  дуги данного круга, отвечает угол  $\Delta\lambda$ , а длине всего круга  $L$  отвечает угол 360°:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell \rightarrow \Delta\lambda, \\ L \rightarrow 360^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\lambda = 360^\circ \left( \frac{\ell}{L} \right) = 360^\circ \left( \frac{\ell}{2\pi \mathfrak{R}_\oplus \cos \varphi_S} \right) = 4^\circ 44'. \quad (8)$$

откуда

$$\lambda_W = \lambda_E - \Delta\lambda = 47^\circ 51'.$$

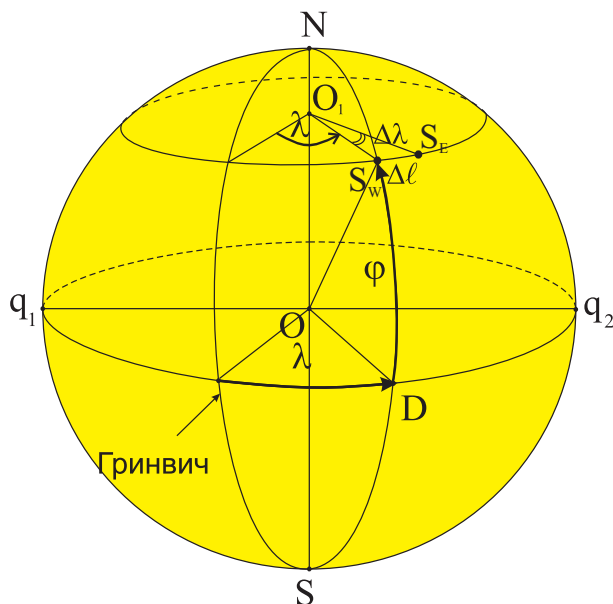


Рис. 8: к определению разности географических долгот.

здесь учтено, что за 1 час Земля поворачивается на  $15^\circ$ .

г) 23 сентября – *день осеннего равноденствия* – в эти сутки Солнце проходит через точку осеннего равноденствия и при этом склонение ( $\delta_\odot$ ) Солнца непрерывно уменьшается. Значение последнего определяет продолжительность пребывания Солнца над горизонтом или продолжительность дня. Чем больше  $\delta_\odot$ , тем больше продолжительность дня. Жители самой восточной точки Самарской области приблизительно на величину  $\Delta T$  увидят раньше восход, кульминацию и заход Солнца, нежели жители самой западной точки. Они видят Солнце с большим склонением, следовательно продолжительность дня для жителей самой восточной точки Самарской области будет больше (хотя на очень малую величину), чем для жителей самой западной точки.

21 марта – *день весеннего равноденствия* – в эти сутки Солнце проходит через точку весеннего равноденствия и при этом склонение ( $\delta_\odot$ ) Солнца непрерывно увеличивается. Здесь ситуация обратная выше описанной (по тем же причинам) – продолжительность дня для жителей самой восточной точки Самарской области будет меньше (хотя на очень малую величину), чем для жителей самой западной точки.

**Ответ:** а)  $\eta = \frac{S_s}{S_{RF}} \times 100\% = 0.31\%$ , б)  $\lambda_W = 47^\circ 51'$ , в)  $\Delta T = 0.315 \text{ час} = 18.9 \text{ мин}$ ; г) 23 сентября продолжительность дня для жителей самой восточной точки Самарской области будет больше, чем для жителей самой западной точки; 21 марта продолжительность дня для жителей самой восточной точки Самарской области будет меньше, чем для жителей самой западной точки. ( $S_{\max} = 8$  баллов).

### Задача № 10. «Время вечерней видимости Венеры»

**Условие.** Предположим, что Венера 21 марта оказалась в наибольшей восточной элонгации. При этом склонение планеты оказалось равным  $\delta_\varphi = 0^\circ 00'$ . В каких точках поверхности Земли азимут Венеры не будет изменяться от верхней кульминации до захода? В какой точке горизонта при этом будет виден (в идеальных условиях) заход планеты? С использованием результатов задачи № 8, оцените минимальное и максимальное возможные значения продолжительности вечерней видимости планеты над горизонтом при данных условиях. (8 баллов).

**Дано:**

$T = 21$  марта,  
 $\delta_{\odot} = 0^{\circ}00'$ ,  
 восточ. элонгация

**Найти:**

$\tau_{\text{vis}}^{(\text{min})}$ ,  $\tau_{\text{vis}}^{(\text{max})}$  – ?

**Решение:**

Как известно, 21 марта – день весеннего равноденствия – в эти сутки Солнце проходит через точку весеннего равноденствия и при этом ее склонение  $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$ . Следовательно, Венера и Солнце совершают свое суточное движение по небесному экватору и восходят в точке востока ( $E$ ), а заходят в точке запада ( $W$ ).

Для наблюдателя, находящегося на земном экваторе, небесный экватор и первый вертикал будут совпадать, и потому Венера будет двигаться от верхней кульминации до захода вдоль последнего, азимут дуги которого постоянен и равен  $A_W = 90^{\circ}$ .

В других точках поверхности Земли такая ситуация невозможна.

Оценим минимальное ( $\tau_{\text{vis}}^{(\text{min})}$ ) и максимальное ( $\tau_{\text{vis}}^{(\text{max})}$ ) возможные значения продолжительности вечерней видимости планеты над горизонтом при данных условиях. Для этого учтем, что угловая скорость видимого движения Венеры по небосводу будет равна угловой скорости суточного вращения Земли (поскольку планета находится на небесном экваторе), равной  $\omega_{\oplus} = 15.04^{\circ}/\text{час}$ . Продолжительность вечерней видимости Венеры определяется промежутком времени между моментами заходов Солнца и Венеры за горизонт. Другими словами, необходимо вычислить промежуток времени, в течение которого Земля повернется на величину наибольшей элонгации  $\alpha$ . Тогда

$$\tau_{\text{vis}}^{(\text{max})} = \frac{\alpha_{\text{max}}}{\omega_{\oplus}} = \frac{1}{\omega_{\oplus}} \arcsin \left( \frac{a_{\odot}(1 + \varepsilon_{\odot})}{a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus})} \right) = 3 \text{ час } 11 \text{ мин.}$$

$$\tau_{\text{vis}}^{(\text{min})} = \frac{\alpha_{\text{min}}}{\omega_{\oplus}} = \frac{1}{\omega_{\oplus}} \arcsin \left( \frac{a_{\odot}(1 - \varepsilon_{\odot})}{a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus})} \right) = 2 \text{ час } 59 \text{ мин.}$$

**Замечание:** следует отметить, что ситуация описанная в задаче не реалистичная, поскольку 21 марта Солнце проходит точку весны - точку пересечения двух кругов (экватора и эклиптики), а Венера должна быть расположена на расстоянии  $45-48^{\circ}$  от Солнца на эклиптике, следовательно, она не может быть на экваторе, и ее склонение в это момент не может равняться нулю. Однако, такой "упрощенный сценарий" позволяет сделать весьма точные оценки видимости минимизируя расчеты.

**Ответ:** Для наблюдателя, находящегося на земном экваторе, азимут Венеры не будет изменяться от верхней кульминации до захода; Венера восходит в точке востока ( $E$ ) и заходит в точке запада ( $W$ );  $\tau_{\text{vis}}^{(\text{max})} = 3$  час 11 мин,  $\tau_{\text{vis}}^{(\text{min})} = 2$  час 59 мин. ( $\$_{\text{max}} = 8$  баллов).

**Задача № 11. «Линейные размеры составляющих кометы C/2014 E2 (Jacques)»**

**Условие.** С использованием фотографии кометы C/2014 E2 (см. рис. 9) оцените линейные размеры (в километрах) видимой части комы кометы и части хвоста, если известно, что фотография получена 21 мая 2014 года, когда геоцентрическое расстояние до кометы было равно  $\Delta = 1.529$  а.е. Данная фотография охватывает участок неба с размерами  $50' \times 50'$ . (9 баллов).

**Дано:**

$\Delta = 1.529$  а.е.,  
 $50' \times 50'$ .

**Найти:**

$D_{\text{coma}}$ ,  $L_{\text{tail}}$  – ?

**Решение:**

Для определения линейных размеров составляющих кометы необходимо, прежде всего, оценить соответствующие угловые размеры. Указанная проблема была решена в рамках задачи № 6 (для параллели 8-9 классов, смотри решение задач).

Значения угловых размеров получились:

- Угловой диаметр комы –  $\ell'_{\text{coma}} = 5.63'$ ;
- Угловая длина хвоста кометы –  $\ell'_{\text{tail}} = 26.41'$ .



Рис. 9: комета C/2014 E2 Jacques. Фотография получена Р. Лигастри (Rolando Ligustri) 21 мая 2014 года.

Тогда линейные размеры комы (диаметр) и хвоста (длина) представляются в виде:

$$D_{\text{coma}} = \left( \frac{\ell'_{\text{coma}}}{3437.75'} \right) \Delta \approx 3.75 \cdot 10^5 \text{ км}, \quad L_{\text{tail}} = \left( \frac{\ell'_{\text{tail}}}{3437.75'} \right) \Delta \approx 1.76 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

**Ответ:**  $D_{\text{coma}} = \left( \frac{\ell'_{\text{coma}}}{3437.75'} \right) \Delta \approx 3.75 \cdot 10^5 \text{ км}, L_{\text{tail}} = \left( \frac{\ell'_{\text{tail}}}{3437.75'} \right) \Delta \approx 1.76 \cdot 10^6 \text{ км}.$  ( $\$_{\text{max}} = 9$  баллов).

**Задача № 12. «Поверхностная яркость, светимость и альbedo комы кометы C/2014 E2 (Jacques)»**

**Условие.** С использованием фотографии кометы C/2014 E2 (см. рис. 9), данных и результатов решения предыдущей задачи, определите среднюю поверхностную яркость комы кометы (в звездных величинах, приходящихся на единицу угловой площади, т.е. в  $m''$ ). Оцените также полный световой поток, отбрасываемый комой кометы в направлении Земли (в Ваттах) и ее дифференциальное альbedo (отношение потока видимого излучения отбрасываемого комой кометы в направлении Земли, в соответствующий телесный угол, к полному потоку солнечного излучения, падающему на кому кометы) для земного наблюдателя, если гелиоцентрическое расстояние кометы в

момент наблюдений было равно  $r_{hc} = 1.029$  а.е., а видимая звездная величина  $m_c = 11.9^m$ . (10 баллов)

**Дано:**  
 $\Delta = 1.529$  а.е.,  
 $m_c = 11.9^m$ .

**Найти:**  
 $B_s, \Phi_{\text{tot}}, A_d - ?$

**Решение:**

**Поверхностная яркость комы кометы** ( $B_s$ ) – это звездная величина, соответствующая освещенности ( $E_s$ ), определенной у поверхности Земли и создаваемой площадкой источника с размерами  $1'' \times 1''$ .

Полагая, что кома является ламбертовским источником света (т.е. излучает по всем направлениям одинаково), то

$$E_s = \frac{E_c}{\Omega_c},$$

где  $E_c$  – освещенность, создаваемая всей комой у поверхности Земли;  $\Omega_c$  – телесный угол, под которым видна кома кометы с Земли.

Поскольку угловой диаметр комы кометы мал  $\ell'_{\text{coma}} = 5.63' \ll 3^\circ$ , то телесный угол можно вычислить по приближенной формуле:

$$\Omega_c = \frac{\pi}{4} (\ell'_{\text{coma}})^2 = 89621 \text{ угл. сек.}$$

Воспользуемся далее формулой Погсона для  $B_s$  и  $m_c$ , то

$$B_s - m_c = -2.512 \lg \left( \frac{E_s}{E_c} \right), \Rightarrow B_s = m_c + 2.512 \lg (\Omega_c) = 24.3^m / \text{угл. сек.}$$

Полный поток излучения, пришедшего от кометы и упавшего на Землю есть

$$\Phi_{\text{tot}} = E_c \cdot (\pi \mathfrak{R}_\oplus^2),$$

здесь  $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$  км – средний по объему радиус Земли.

Для определения величины  $E_c$  учтем, что освещенность, создаваемая звездой с звездной величиной (блеском)  $m_0 = 0.0^m$  составляет  $E_0 = 2.48 \cdot 10^{-8}$  Вт/м<sup>2</sup>, тогда по формуле Погсона находим искомую величину:

$$E_c = E_0 \cdot 10^{0.4(m_0 - m_c)} = E_0 \cdot 10^{-0.4 m_c} = 4.31 \cdot 10^{-13} \text{ Вт/м}^2.$$

В итоге поток  $\Phi_{\text{tot}} = 55$  Вт.

Согласно определению, дифференциальное альbedo есть

$$A_d = \left( \frac{\Phi_{\text{tot}}}{\Omega_\oplus} \right) \frac{1}{\Phi_0}, \quad (9)$$

здесь  $\Omega_\oplus$  – телесный угол под которым видна Земля с кометы. Данный угол определяется выражением вида:

$$\Omega_\oplus = \frac{\pi \mathfrak{R}_\oplus^2}{\Delta^2}.$$

В формуле (10)  $\Phi_0$  – полный поток электромагнитного излучения Солнца, падающего на кому кометы. Последний можно вычислить по формуле:

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{4} D_c^2 E_\odot = \frac{\pi}{4} D_c^2 f_\odot \left( \frac{a_\oplus}{r_{hc}} \right)^2 = 1.49 \cdot 10^{20} \text{ Вт.}$$

здесь  $E_\odot$  – освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности комы кометы,  $f_\odot = 1361$  Вт/м<sup>2</sup> – солнечная постоянная

В итоге

$$A_d = \frac{4}{\pi} \cdot 10^{-0.4 m_c} \frac{E_0}{f_\odot} \left( \frac{\Delta^2}{D_c^2} \right) \left( \frac{r_{hc}}{a_\oplus} \right)^2 = 1.59 \cdot 10^{-10}. \quad (10)$$

Отметим, что столь низкое альbedo комы объясняется ее ультраразреженностью.

**Ответ:**  $B_s = 24.3^m / \text{угл. сек.}$ ,  $\Phi_{\text{tot}} = 55$  Вт,  $A_d = 1.59 \cdot 10^{-10}$ . ( $\$_{\text{max}} = 10$  баллов).

## Уровень «Профи» (уровень С)

## Задача № 13. «Вспышка ИСЗ»

**Условие.** Астроном-любитель (находившийся на земном экваторе), выполняя обзор восточной части небосвода 21 марта 2014 года, за 240 минут до восхода Солнца, наблюдал вблизи горизонта «вспышку» низкоорбитального искусственного спутника Земли – резкое увеличение его видимого блеска, обусловленное отражением (согласно закону отражения) солнечных лучей от рабочей поверхности его солнечных батарей. Для уменьшения силы сопротивления атмосферы ориентация панелей солнечных батарей всегда перпендикулярна отвесной линии в данной точке орбиты. Предполагая, что орбита ИСЗ является круговой, а ее наклонение к плоскости земного экватора равно нулю, определите ее радиус, высоту орбиты, расстояние до спутника и период его обращения. Рефракцией света в атмосфере Земли пренебречь. (11 баллов).

**Дано:**

$\Delta t = 240$  мин,  
21 марта.

**Найти:**

$r, H, L, T - ?$

**Решение:**

Поскольку наклонение орбиты спутника к плоскости земного экватора равно нулю, то Солнце, наблюдатель и спутник лежат в одной плоскости. Наблюдатель в начальный момент времени находится в точке  $O_1$ . В момент восхода Солнца в местности, где находится наблюдатель, последний будет находиться в точке  $O_2$ . Угол  $\angle O_1CO_2 = \beta$  – угол поворота Земли вокруг своей оси, определяемый выражением:

$$\beta = \omega_{\oplus} \cdot \Delta t = 60.2^\circ,$$

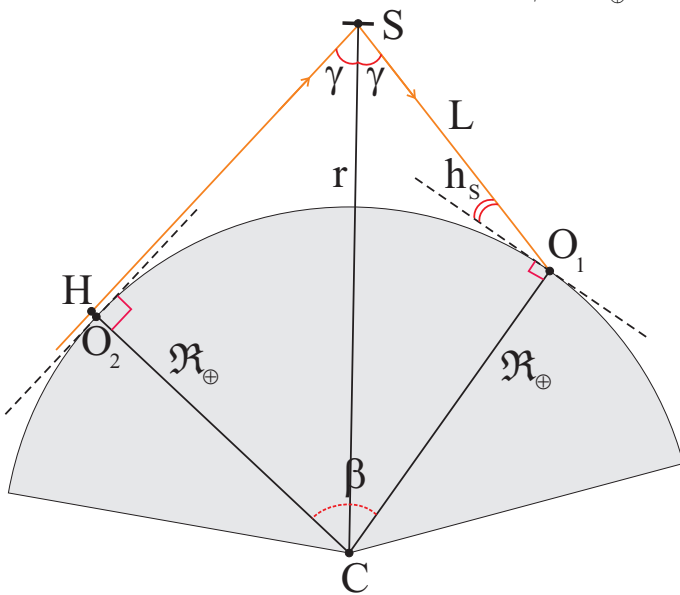


Рис. 10: к определению радиуса орбиты спутника.

где  $\omega_{\oplus} = 15.04^\circ/\text{час}$  – угловая скорость суточного вращения Земли.

Из четырехугольника  $CO_1SO_2$  следует, что

$$90^\circ + 2\gamma + (90^\circ + h_s) + \beta = 360^\circ, \Rightarrow$$

$$h_s = 180^\circ - 2\gamma - \beta.$$

Поскольку, по условию задачи, «вспышка» наблюдалась вблизи горизонта, то ее высота  $h_s \approx 0^\circ$ . Откуда следует, что

$$\gamma \approx 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Для треугольника  $\triangle CSO_1$  согласно теореме синусов имеем выражения для  $CS = r$ ,  $SO_1 = L$ :

$$r = \mathfrak{R}_{\oplus} \frac{\sin(90^\circ + h_s)}{\sin \gamma} \approx \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\cos \frac{\beta}{2}} = 1.156 \cdot \mathfrak{R}_{\oplus}.$$

Численный расчет дает значение  $r = 7372$  км (при  $\mathfrak{R}_{\oplus} = 6378$  км – средний экваториальный радиус Земли), при этом высота орбиты есть

$$H = r_{\oplus} - \mathfrak{R}_{\oplus} = 994 \text{ км}.$$

Расстояние до спутника есть

$$L = \mathfrak{R}_{\oplus} \frac{\sin(90^\circ - h_s - \gamma)}{\sin \gamma} \approx \mathfrak{R}_{\oplus} \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \mathfrak{R}_{\oplus} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 3693 \text{ км}. \quad (11)$$

С использованием третьего закона Кеплера находим период обращения спутника:

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{r^3}{\mathfrak{R}_{\oplus}^3}, \Rightarrow T = T_1 \left( \frac{r}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right)^{3/2} = 1.243 \cdot T_1 = 1.749 \text{ часа}. \quad (12)$$

$T_1$  – период обращения спутника, движущегося у поверхности Земли с первой космической скоростью:

$$T_1 = \frac{2\pi R_{\oplus}}{\sqrt{g_0 R_{\oplus}}} = 1.408 \text{ часа.}$$

**Ответ:**  $r \approx \frac{R_{\oplus}}{\cos \frac{\beta}{2}} = 1.156 \cdot R_{\oplus} = 7372 \text{ км, } H = 994 \text{ км, } L \approx R_{\oplus} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 3693 \text{ км, } T = 1.749$  часа. ( $\$_{\max} = 11$  баллов).

**Задача № 14. «Селфи аппарата Rosetta и масса ядра 67P/Чурюмова-Герасименко»**

**Условие.** 7 сентября 2014 года космическим аппаратом (КА) Rosetta, с помощью автоматизированного "глаза" посадочного модуля Philae была сделана фотография-селфи (см. рис. ??), на которой можно увидеть солнечную батарею аппарата Rosetta на фоне ядра кометы 67P/Чурюмова-Герасименко. Известно, что длина "дверной петли" солнечной батареи (отрезок АВ) равна 30 см, а расстояние от петли до объектива фотокамеры – 230 см. На рис. ?? представлена для сравнения фотография ядра 67P/Чурюмова-Герасименко с высоким разрешением, размеры которого равны  $3 \times 5$  км. В момент получения фотографии КА двигался вокруг ядра кометы по круговой орбите с периодом 31.9 сут. Используя имеющиеся данные, определите радиус орбиты КА и массу ядра кометы. (12 баллов).

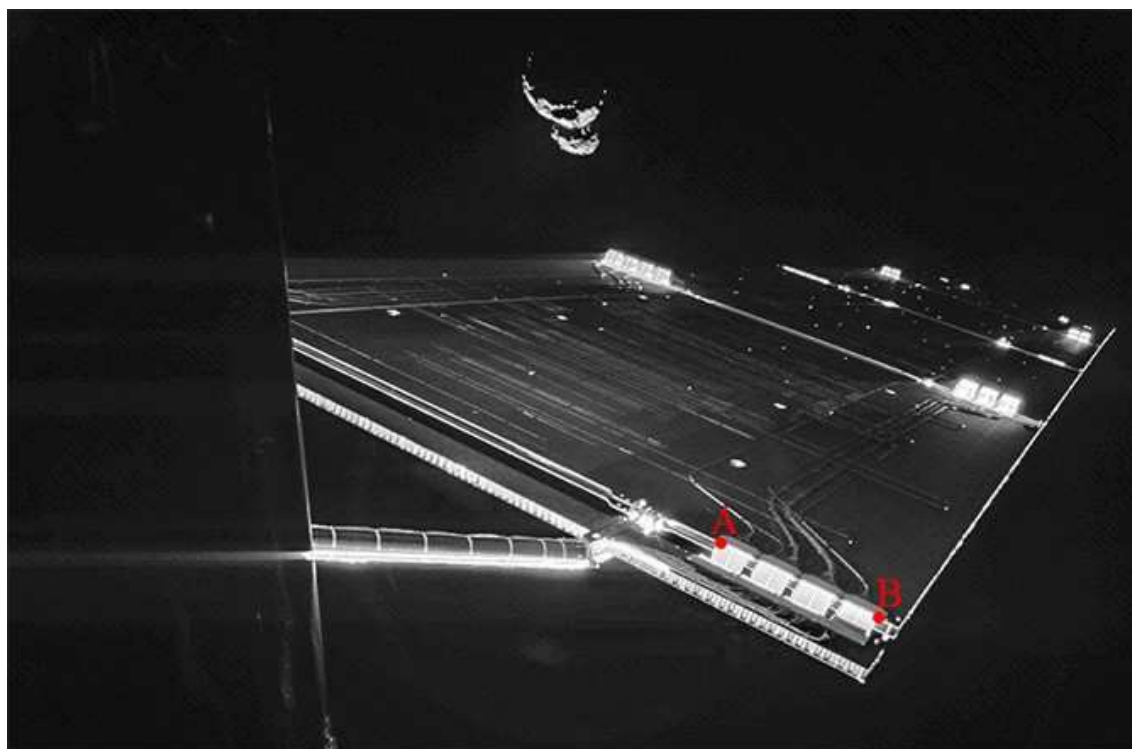


Рис. 11: Селфи, полученное аппаратом Rosetta. На фото попало ядро 67P/Чурюмова-Герасименко.

**Дано:**

$d = 230 \text{ см,}$   
 $\ell = 30 \text{ см,}$   
 $a \times b = 3 \times 5 \text{ км,}$   
 $T = 31.9 \text{ сут}$

**Найти:**

$r, M_N - ?$

**Решение:**

Заметим, что "дверная петля" солнечной батареи видна почти плашмя, т.е. световые лучи от нее идут почти перпендикулярно ее главному измерению (определяемому его длиной). Следовательно, легко определить угол ( $\alpha$ ), под которым она видна для камеры Philae: из треугольника  $\triangle OAC$  (см. рис. 13, здесь в точке О расположена камера) следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\ell}{2d}, \Rightarrow \alpha = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\ell}{2d} \right) = 7.46^\circ. \quad (13)$$

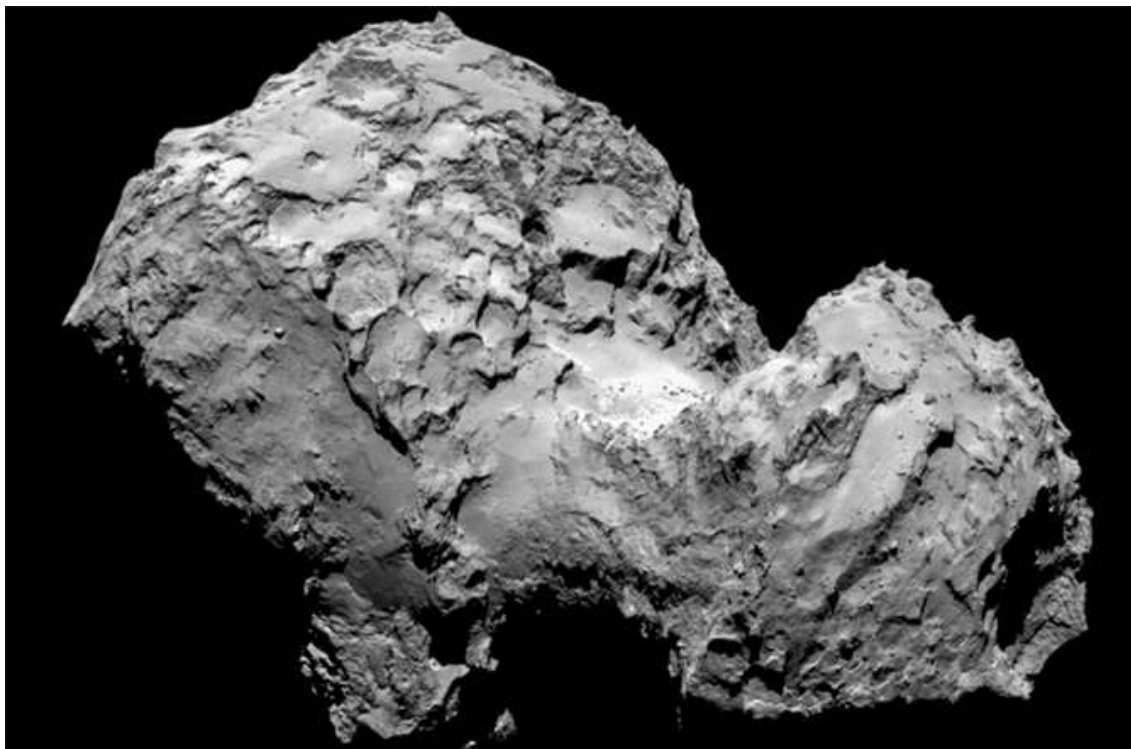


Рис. 12: Фотография ядра 67P/Чурюмова-Герасименко с высоким разрешением, полученная аппаратом Rosetta.

Зная угол  $\alpha$  и линейный размер петли на фотографии  $\ell_\alpha = 25$  мм (последний определяем по фотографии линейкой, в мм; следует помнить, что ваш результат может отличаться от выше приведенного) можно определить угловой масштаб фотографии  $\mu'_\ell$ :

$$\mu'_\ell = \frac{\alpha}{\ell_\alpha} = 0.298^\circ/\text{мм}. \quad (14)$$

Из сопоставления фотографий (11) и (12) следует, что на фотографии видна сторона ядра, характеризующая меньшим измерением  $b$ , которое можно определить как

$$b = 2r \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad (15)$$

где  $\beta$  – угол, под которым видно с борта КА меньшее измерение ядра, определяемое величиной  $b$ . Данный угол определяем с использованием углового масштаба фотографии и расстояния  $r$ :

$$\beta = \mu'_\ell \ell_\beta = 3.58^\circ,$$

здесь  $\ell_\beta = 12$  мм – значение меньшего измерения ядра кометы, определяемое по рисунку (в мм).

С использованием выше приведенных рассуждений и формулы (13) легко найти расстояние до ядра кометы (радиус орбиты космического аппарата Rosetta):

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2r}, \Rightarrow r = \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = 48 \text{ км}. \quad (16)$$

Далее воспользуемся вторым законом Ньютона для КА, движущегося по круговой орбите (в проекциях на направление "КА-ядро кометы"):

$$m_{sc} a_{sc} = \frac{G m_{sc} \mathcal{M}_N}{r^2}, \quad (17)$$

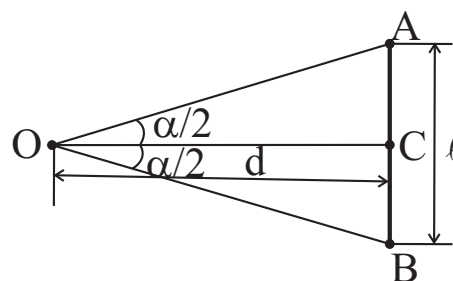


Рис. 13: к определению угла  $\alpha$ .



здесь  $m_{sc}, a_{sc}$  – масса и ускорение КА. При движении по круговой орбите  $a_{sc}$  есть центростремительное ускорение, которое можно представить в виде:

$$a_{sc} = \omega_{sc}^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

В результате второй закон Ньютона (17) представляется в виде:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{G \mathcal{M}_N}{r^2}, \Rightarrow \mathcal{M}_N = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 9 \cdot 10^{12} \text{ кг.} \quad (18)$$

Последний результат согласуется с наиболее точными гравиметрическими оценками массы ядра кометы ( $\mathcal{M}_N = (1.0 \pm 0.1) \cdot 10^{13}$  кг).

**Ответ:**  $r = 48$  км,  $\mathcal{M}_N = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 9 \cdot 10^{12}$  кг. ( $\$_{\max} = 12$  баллов).

### Задача № 15. «Поток и плотность потока солнечных нейтрино»

**Условие.** Как известно, основным источником энергии в теле Солнца являются термоядерные реакции, которые идут в его ядре. В каждом элементарном акте превращения водорода в гелий образуются два электронных нейтрино ( $\nu_e$ ) и гамма-кванты ( $\gamma$ ), устремляющихся прочь из ядра, при этом гамма-квантами уносится энергия, равная 26.14 МэВ. Полагая светимость Солнца, равной  $L_{\oplus} = 3.827 \cdot 10^{26}$  Вт, оцените а) полный поток нейтрино, образующихся в ядре Солнца; б) плотность потока нейтрино, определенную для площадки величиной  $1 \text{ м}^2$ , находящуюся у поверхности Земли. (13 баллов).

<b>Дано:</b>
$L_{\oplus} = 3.827 \cdot 10^{26}$ Вт,
$E_{\gamma} = 26.14$ МэВ,
$N_{\nu} = 2$ .
<b>Найти:</b>
$\Phi_{\nu}^{(\text{tot})}, j_{\nu} - ?$

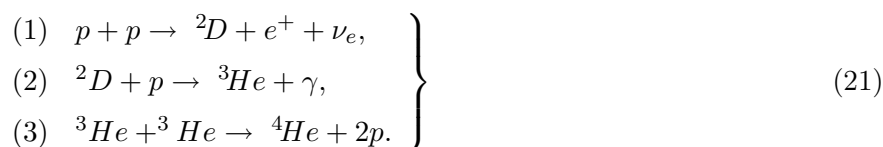
**Решение:**  
**Потоком частиц** ( $\Phi_p$ ) называется отношение количества частиц ( $\Delta N$ ), прошедших через какую-либо площадку (в нашем случае поверхность Солнца) за промежуток времени  $\Delta t$ , к величине этого промежутка:

$$\Phi_p = \frac{\Delta N}{\Delta t}. \quad (19)$$

**Плотностью потока частиц** ( $j_p$ ) называется отношение количества частиц ( $\Delta N$ ), прошедших через площадку  $\Delta S$  (причем направление скорости частиц должно быть перпендикулярно площадке) за промежуток времени  $\Delta t$ , к величинам этого промежутка и площадки:

$$j_p = \frac{\Delta N}{\Delta t \Delta S}. \quad (20)$$

Как известно, существуют два альтернативных цикла термоядерных реакций, которые идут в недрах звезд: *протон-протонный* цикл и *углеродный* цикл. Поскольку Солнце является маломассивной звездой, то доминирующим циклом для Солнца является протон-протонный цикл (95% ÷ 98% от всей энергии, генерируемой в ядре приходится именно на данный цикл). Наиболее вероятным сценарием реализации данного цикла является следующая цепочка процессов:



Очевидно, что в каждом элементарном акте превращения водорода в гелий образуются два электронных нейтрино ( $\nu_e$ ) и два гамма-кванты ( $\gamma$ ) ( $N_{\nu} = N_{\gamma} = 2$ ). Следовательно, потоки фотонов и нейтрино, рождающихся в ядре должны быть равны:

$$\Phi_{\nu} = \Phi_{\gamma}, \quad \Phi_{\nu} = N_{\nu} \frac{\Delta N_c}{\Delta t}, \quad \Phi_{\gamma} = N_{\gamma} \frac{\Delta N_c}{\Delta t},$$

здесь  $\Delta N_c / \Delta t$  – количество протон-протонных циклов, реализуемых в ядре за единицу времени. Данную величину можно вычислить, зная полное количество энергии, излучаемой в виде

электромагнитного излучения за единицу времени ( $L_{\odot}$ ) и энергию, уносимую квантами этого излучения ( $\gamma$ -квантами) из одного элементарного цикла:

$$\frac{\Delta N_c}{\Delta t} = \frac{L_{\odot}}{E_{\gamma}}.$$

В результате

$$\Phi_{\nu} = N_{\nu} \frac{L_{\odot}}{E_{\gamma}} = 2 \frac{3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}}{26.14 \cdot 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}} = 1.8 \cdot 10^{38} \text{ частиц/с.} \quad (22)$$

Нейтрино – элементарная частица, которая очень слабо взаимодействует с другими частицами и, потому беспрепятственно проходит сквозь тело Солнца, поэтому фактически тот же поток частиц уходит в космическое пространство. Данный поток является *изотропным*, поэтому легко вычислить плотность потока нейтрино

$$j_{\nu} = \frac{\Phi_{\nu}}{4\pi a_{\oplus}^2} = 6.5 \cdot 10^{14} \text{ частиц}/(\text{с} \cdot \text{м}^2).$$

здесь  $a_{\oplus} = 1$  а.е. – большая полуось земной орбиты.

**Ответ:**  $\Phi_{\nu} = N_{\nu} \frac{L_{\odot}}{E_{\gamma}} = 1.8 \cdot 10^{38}$  частиц/с,  $j_{\nu} = \frac{\Phi_{\nu}}{4\pi a_{\oplus}^2} = 6.5 \cdot 10^{14}$  частиц/(с · м<sup>2</sup>). ( $S_{\max} = 13$  баллов).

### Задача № 16. «Площадь летне-осеннего треугольника»

**Условие.** Найти (угловую) площадь (в квадратных градусах) части небесной сферы, заключенную внутри летне-осеннего треугольника. Все необходимые данные возьмите из справочной литературы. (13 баллов).

<u>Дано:</u> летне-осенний тре- угольник.	<u>Решение:</u> <b>Сферический треугольник</b> ( $\Delta_S ABC$ ) – геометрическая фигура на поверхности сферы, образованная пересечением трех больших кругов (см. рис. 14.а). Как известно, сумма углов сферического треугольника $s = A + B + C$ удовлетворяет неравенству
<u>Найти:</u> $\Omega_{\Delta} - ?$	$\pi < s < 3\pi.$

**Сферическим избытком** называется величина

$$\varepsilon = s - \pi.$$

Тогда площадь сферического треугольника есть величина

$$S = \varepsilon \cdot R^2,$$

где  $R$  – радиус сферы, на поверхности которой расположен данный сферический треугольник. **Угловая площадь** или **телесный угол** участка небосвода есть величина, равная отношению площади этого участка к квадрату радиуса небесной сферы:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

В случае сферического треугольника

$$\Omega_{\Delta} = \frac{\varepsilon \cdot R^2}{R^2} = \frac{41253^{\circ}}{4\pi} \varepsilon.$$

здесь  $[\Omega_{\Delta}] =$  квад. градусы,  $[\varepsilon] =$  рад.

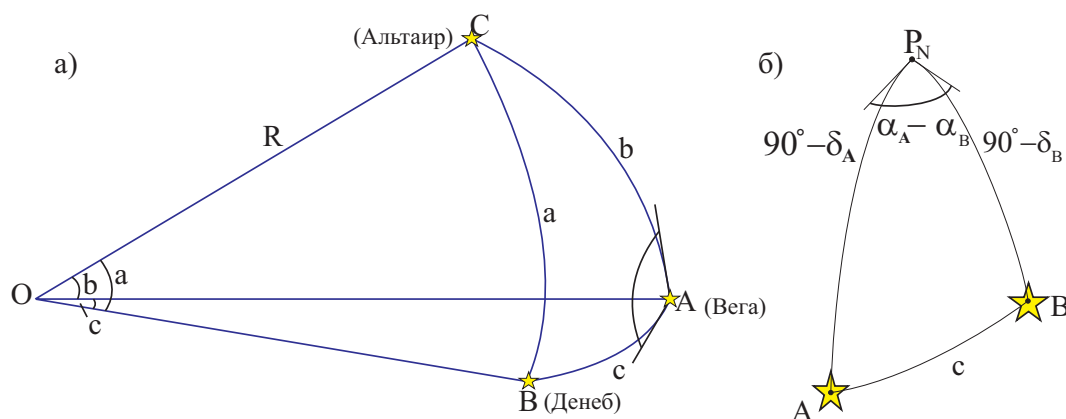


Рис. 14: к определению а) сторон и углов летне-осеннего треугольника, б) вспомогательного сферического треугольника.

Т.о. необходимо вычислить углы при вершинах данного треугольника:  $\angle A$  (при Вега,  $\alpha$  Лиры),  $\angle B$  (при Денебе,  $\alpha$  Лебедя),  $\angle C$  (при Альтаире,  $\alpha$  Орла) (см. рис. 14.а). Для определения данных углов необходимо воспользоваться теоремой косинусов для стороны треугольника  $\Delta_{S}ABC$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \arccos \left[ \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right], \\ B = \arccos \left[ \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \right], \\ C = \arccos \left[ \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \right]. \end{array} \right\} \quad (23)$$

т.о. проблема углов при вершинах свелась к определению сторон треугольника.

Рассмотрим задачу определения стороны  $c$ . Для этого рассмотрим сферический треугольник  $\Delta_{S}ABP_N$  (см. рис. 14.б), составленный из звезд А и В северного полюса мира  $P_N$ . Здесь  $AP_N$  и  $BP_N$  есть дуги кругов склонений данных звезд и равны соответственно  $90^\circ - \delta_A$  и  $90^\circ - \delta_B$  соответственно, где  $\delta_A, \delta_B$  – склонения данных звезд. Угол при вершине равен разности прямых восхождений данных звезд  $\angle P_N = \alpha_A - \alpha_B$ , тогда можно вновь воспользоваться теоремой косинусов для стороны  $c$

$$\cos c = \cos(90^\circ - \delta_A) \cos(90^\circ - \delta_B) + \sin(90^\circ - \delta_A) \sin(90^\circ - \delta_B) \cos(\alpha_A - \alpha_B), \Rightarrow$$

$$c = \arccos [\sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)]. \quad (24)$$

причем  $0 \leq c \leq \pi$ . Аналогично рассуждая, можно определить стороны  $a$  и  $b$ . В итоге

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \arccos [\sin \delta_B \sin \delta_C + \cos \delta_B \cos \delta_C \cos(\alpha_B - \alpha_C)], \\ b = \arccos [\sin \delta_A \sin \delta_C + \cos \delta_A \cos \delta_C \cos(\alpha_A - \alpha_C)], \\ c = \arccos [\sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)]. \end{array} \right\} \quad (25)$$

В справочной литературе находим экваториальные координаты данных звезд:

$$\begin{aligned} A(\text{Вега}) &= \{18^h 36^m 56^s, +38^\circ 47' 01''\} = \{279.978^\circ, +38.784^\circ\}, \\ B(\text{Денеб}) &= \{20^h 41^m 26^s, +45^\circ 16' 49''\} = \{311.186^\circ, +45.280^\circ\}, \\ C(\text{Альтаир}) &= \{19^h 50^m 47^s, +08^\circ 52' 06''\} = \{298.490^\circ, +8.868^\circ\}. \end{aligned}$$

Проводя вычисления согласно изложенному выше алгоритму, в результате получаем:

$$a = 38.022^\circ, \quad b = 34.218^\circ, \quad c = 23.907^\circ.$$

$$A = 81.977^\circ, \quad B = 64.689^\circ, \quad C = 40.652^\circ.$$

Тогда  $s = 187.318^\circ = 3.26931$  рад, сферический избыток  $\varepsilon = 0.12772$ , угловая площадь треугольника  $\Omega_{\Delta} = 419.3$  кв. град.

**Ответ:**  $\Omega_{\Delta} = 419.3$  кв. град. ( $\$_{\max} = 13$  баллов).

**Задача № 17. «Амплитуда статической деформации поверхности Земли»**

**Условие.** Как известно, Луна и Солнце оказывают наибольшее гравитационное воздействие на тело Земли. В частности, приливные силы, действующие со стороны данных тел приводят к искажению формы Земли: на поверхности Земли появляется приливной горб (подъем земной коры). Оцените амплитуду статической деформации поверхности Земли (величину отклонения тела Земли от формы шара, в отсутствие ее суточного вращения). Определите значения амплитуды в случае Солнца и Луны. Все необходимые данные возьмите из справочной литературы. (14 баллов).

**Решение:**

Определим амплитуду статической деформации поверхности Земли под действием приливных сил Луны и Солнца. Рассмотрим два альтернативных способа решения поставленной задачи.

**Способ № 1. Энергетический подход.** Рассмотрим гипотетическую ситуацию в отношении Земли: будем полагать, что планета не имеет осевого вращения, и потому на ней приливообразующие силы практически не зависят от времени.

В случае невращающейся Земли полная потенциальная энергия пробного тела массы  $m$  у поверхности планеты определяется суммой двух слагаемых: энергией поля силы тяжести Земли  $U_g$  и энергией приливной силы  $U_t$ :

$$U_{\text{tot}}(r', \theta) = U_g + U_t = mgr' - \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{r'}{a_{\oplus}} \right)^2 \cos 2\theta. \quad (26)$$

здесь  $U_t$  – потенциальная энергия приливного взаимодействия для пробного тела массы  $m$ , которая определяется (см. например, литературу<sup>1</sup>) выражением вида:

$$U_t = -\frac{3}{4}U_0 \left( \frac{r'}{\Delta_i} \right)^2 \cos 2\theta, \quad \text{где } U_0 = \frac{Gm\mathcal{M}_i}{\Delta_i}. \quad (27)$$

здесь  $r'$  – величина геоцентрического радиус-вектора пробного тела (см. рис. 15),  $\Delta_i$  – геоцентрическое расстояние до приливообразующего тела,  $\mathcal{M}_i$  – его масса ( в нашем случае это Солнце ( $\odot$ ) и Луна ( $\ominus$ )).  $\theta$  – полярный угол, откладываемый от продолжения прямой "приливообразующее тело-Земля".

С использованием явного выражения для приливной силы можно легко убедиться в том, что последняя стремится растянуть сферическое тело Земли вдоль прямой "приливообразующее тело-Земля" и сжать в направлениях, перпендикулярных к данному. В результате этого тело Земли приобретает форму слабо вытянутого эллипсоида большая полуось которого равна  $a_E = R_{\oplus} + \delta a$ , а малая полуось –  $b_E = R_{\oplus} - \delta a$ , где  $R_{\oplus}$  – радиус сферического, невозмущенного тела Земли;  $\delta a$  – амплитуда статической деформации поверхности Земли, обусловленного действием приливных сил.

Поскольку форма Земли в равновесном состоянии не меняется, то потенциальная энергия  $U_{\text{tot}}$  во всех точках его поверхности должна быть величиной постоянной. Следовательно, потенциальные энергии в "подсолнечной точке" (см. 15) и в точке, лежащей на малой оси, перпендикулярной

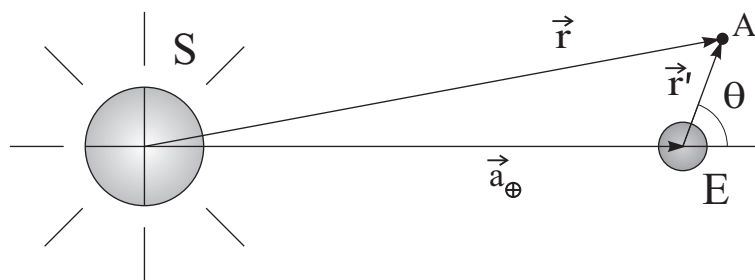


Рис. 15: к определению параметров  $r'$  и  $\theta$ , задающих структуру приливной силы.

<sup>1</sup>Бутиков Е.И. Физика океанских приливов в компьютерных моделях. Учебное пособие и методические материалы к комплексу моделирующих программ. – С.-П.: СПбГУ. – 2007. – 16с.

направлению "приливообразующее тело-Земля" равны между собой

$$U_{\text{tot}}(a_E, \pi) = U_{\text{tot}}(b_E, \pi/2), \Rightarrow m g a_E - \frac{3}{4} U_0 \left( \frac{a_E^2}{\Delta_i^2} \right) = m g b_E + \frac{3}{4} U_0 \left( \frac{b_E^2}{\Delta_i^2} \right),$$

$$m g (a_E - b_E) = \frac{3}{4} U_0 \left( \frac{a_E^2 + b_E^2}{\Delta_i^2} \right), \quad m g \delta a \approx \frac{3}{4} U_0 \left( \frac{R_{\oplus}^2}{\Delta_i^2} \right).$$

Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности Земли есть  $g = G \mathfrak{M}_{\oplus} / a_{\oplus}^2$ , тогда амплитуда статической деформации (обусловленная действием приливных сил Солнца) представляется в виде:

$$\delta a_{\odot} = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{a_{\oplus}} \right)^3 R_{\oplus} = 0.123 \text{ м}, \quad (28)$$

здесь  $\mathfrak{M}_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}$  кг – масса Солнца,  $\mathfrak{M}_{\oplus} = 5.974 \cdot 10^{24}$  кг – масса Земли,  $R_{\oplus} = 6.378 \cdot 10^6$  м – средний экваториальный радиус Земли,  $a_{\oplus} = 1.496 \cdot 10^{11}$  м – среднее расстояние от Земли до Солнца.

Аналогично рассуждая в случае Луны, имеем

$$\delta a_{\zeta} = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{a_{\zeta}} \right)^3 R_{\oplus} = 0.269 \text{ м}. \quad (29)$$

здесь  $\mathfrak{M}_{\zeta} = 7.348 \cdot 10^{22}$  кг – масса Луны,  $a_{\oplus} = 3.844 \cdot 10^8$  м – среднее расстояние от Земли до Луны.

Способ № 2. Динамический подход. Вновь рассмотрим гипотетическую ситуацию невращающейся Земли. При этом приливообразующие силы практически не зависят от времени. В силу квадрупольной симметрии приливообразующих сил (это проявляется в появлении на поверхности Земли двух горбов и двух впадин  $2 \times 2 = 4$  полюса), следует, что поверхность планеты испытываемая статическое искажение, должна принимая форму слабо сплюснутого эллипсоида вращения, уравнение профиля которого в полярных координатах можно представить в виде:

$$r(\theta) = R_{\oplus} + \delta a \cos 2\theta. \quad (30)$$

Здесь  $\delta a$  – амплитуда статической деформации, удовлетворяющая условию  $\delta a \ll R_{\oplus}$ ;  $\theta$  – полярный угол, определенный в предыдущем случае.

В соответствии с уравнением (30), поверхность воды образует следующий угол с горизонтом:

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dr(\theta)}{d\theta} \approx -\frac{2\delta a}{R_{\oplus}} \sin 2\theta. \quad (31)$$

Отсюда следует, что поверхность Земли горизонтальна (т.е.  $\alpha = 0$ ) при  $\theta = 0$  и при  $\theta = 90^\circ$  (в точках  $Z$  и  $A$ ). Угол  $\alpha$  максимален и равен  $(2\delta a)/R_{\oplus}$  при  $\theta = 45^\circ$  и при  $\theta = 135^\circ$ , где приливная сила имеет горизонтальное направление. В состоянии равновесия искаженная приливными силами земная поверхность перпендикулярна линии отвеса. Линия отвеса направлена вдоль векторной суммы силы земного тяготения и приливной силы. Малое отклонение линии отвеса от направления земной тяжести (от направления на центр Земли) вызвано горизонтальной составляющей приливной силы. Поэтому угол  $\alpha$  равен отношению  $F_{hor}$  к  $F_{grav} = m g$ . Можно показать (см. литературу<sup>1</sup>), что горизонтальная составляющая приливной силы есть

$$F_{hor} = -\frac{3}{2} F_0 \left( \frac{r'}{\Delta_i} \right) \sin 2\theta, \quad \text{где } F_0 = \frac{G m \mathfrak{M}_i}{\Delta_i^2}.$$

Приравнивая  $\alpha = 2\delta a/R_{\oplus}$  при  $\theta = 45^\circ$  к  $F_{hor}/F_{grav}$ , получаем для удвоенного значения амплитуды статической деформации поверхности  $2\delta a$  под действием приливообразующих сил:

$$2\delta a = \frac{3}{2} \left( \frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{\Delta_i} \right)^3 R_{\oplus},$$

откуда следуют выражения (28), (29).

**Ответ:**  $\delta a = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{\Delta_i} \right)^3 R_{\oplus}$ ;  $\delta a_{\odot} = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{a_{\oplus}} \right)^3 R_{\oplus} = 0.123$  м,  $\delta a_{\zeta} = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{a_{\zeta}} \right)^3 R_{\oplus} = 0.269$  м. ( $\$_{\text{max}} = 14$  баллов).

**Задача № 18. «Определение склонения Юпитера по горизонтальным координатам его двух положений»**

**Условие.** Астроном-любитель с использованием теодолита получил горизонтальные координаты Юпитера ( $h_1, A_1$  и  $h_2, A_2$ ) в 2 точках его суточной параллели (в два близких момента времени). Им был предложен новый метод определения склонения планеты, с использованием значений высот ( $h_1, h_2$ ) и изменения азимута планеты  $\Delta A = A_2 - A_1$  (см. таблицу 1). Получите аналитическое выражение для склонения светила, с учетом явления рефракции света, в терминах  $\{h_1, h_2, \Delta A, \varphi\}$ , где  $\varphi = 52^\circ 53'$  – астрономическая широта места наблюдения. Решение задачи следует выполнить в виде ряда этапов.

1. Рассмотрите параллактический треугольник; запишите формулы синусов и косинусов для данного треугольника, выражая экваториальные координаты через горизонтальные.
2. С использованием полученных формул, найдите аналитическое выражение для склонения Юпитера  $\delta$ , как явно заданную функцию параметров  $\{h_1, h_2, \Delta A, \varphi\}$ . Выполните анализ полученного результата.
3. Влияние рефракции исключить из данных наблюдений посредством замены исходных данных высоты планеты на исправленные значения

$$h_i \rightarrow h_i^{(0)}, \text{ где } h_i^{(0)} = h_i - \delta h_i,$$

здесь  $\delta h_i$  – угол рефракции, определяемый формулой Лапласа:

$$\delta h_i = A_h \operatorname{ctg} h_i - B_h \operatorname{ctg}^3 h_i, \quad A_h = 57.085'', \quad B_h = 0.067''.$$

4. Вычислите для каждого набора  $\{h_{1i}, h_{2i}, \Delta A_i\}$  значение  $\delta_i$ . Искомый результат для склонения определите средним арифметическим значением  $\bar{\delta}$  для набора  $\{\delta_i\}$ .
5. Ошибку определения склонения планеты  $\bar{\delta}$  оцените посредством использования случайной погрешности среднего арифметического:

$$\Delta \delta = t_n \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\bar{\delta} - \delta_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (32)$$

где  $\delta_i$  –  $i$ -ое значение склонения планеты,  $n$  – количество полученных значений искомой величины (в данном случае  $n = 10$ ),  $t_n = 2.262$  – коэффициент Стьюдента для  $n = 10$ . (15 баллов).

**Решение:**

1. Сферический треугольник, у которого вершинами являются: зенит места наблюдения, полюс мира и светило, называется **параллактическим треугольником** (рис. 16.а).

В параллактическом треугольнике одна сторона – дуга небесного меридиана между полюсом  $P_n$  и зенитом  $Z$  – равна  $90^\circ - \varphi$ , где  $\varphi$  – широта места наблюдения. Другая сторона – полярное расстояние светила  $C$  равна  $90^\circ - \delta$ , и третья равна зенитному расстоянию светила  $z$ . Если светило находится к западу от небесного меридиана, то угол при полюсе есть часовой угол светила  $t$ , угол при зените  $180^\circ - A$ .

Если светило находится к востоку от небесного меридиана, то угол при полюсе будет  $360^\circ - t$ , а угол при зените  $A - 180^\circ$ . Угол  $q$  при светиле называется **параллактическим углом**.

Запишем формулы синусов, косинусов и пяти элементов для данного треугольника, выражая экваториальные координаты через горизонтальные:

$$\left. \begin{aligned} a) \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ b) \cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\ c) \sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

№ п/п	$h_1$ , град	$h_2$ , град	$\Delta A$ , град
1	13.896	14.567	0.850
2	17.121	17.742	0.800
3	21.229	21.825	0.767
4	25.475	26.100	0.858
5	29.450	30.250	1.088
6	32.783	33.692	1.300
7	36.083	36.696	0.921
8	40.642	41.333	1.158
9	44.083	44.633	1.083
10	47.525	48.046	1.175

Таблица 1: значения данных наблюдений Юпитера от 14.08.2000 г, полученные астрономом-любителем.

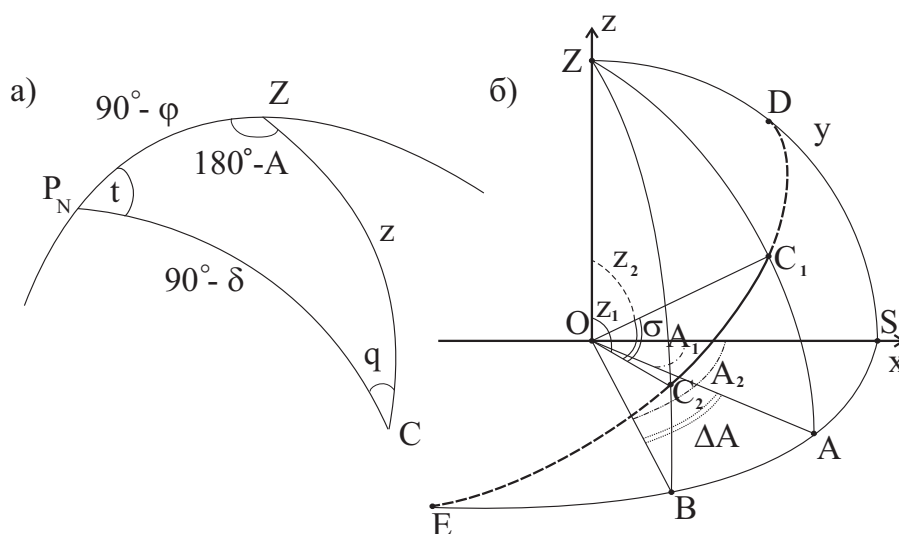


Рис. 16: к определению а) параллактического треугольника, б) склонения небесного тела.

Т.о. при известной широте места наблюдения, зная зенитное расстояние (высоту) и азимут светила, можно вычислить его склонение и часовой угол.

**2.** Рассмотрим задачу определения склонения небесного тела ( $\delta$ ).

Пусть небесное тело в момент времени  $t_1$  находится в точке  $C_1$  небесной сферы (см. рис. 16.б). В силу суточного вращения небесной сферы, в момент времени  $t_2$  объект окажется в точке  $C_2$ , причем  $t_2 - t_1 \ll T_{\oplus}$ . Будем полагать, что произведено измерение горизонтальных координат небесного тела в точках  $C_1 - (h_1, A_1)$  и  $C_2 - (h_2, A_2)$  небесной сферы.

Воспользуемся выражением (33.с), для каждой пары горизонтальных координат можем записать

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \sin h_1 \sin \varphi - \cos h_1 \cos A_1 \cos \varphi, \\ \sin \delta &= \sin h_2 \sin \varphi - \cos h_2 \cos A_2 \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

откуда

$$\cos A_1 = \frac{\sin h_1 \sin \varphi - \sin \delta}{\cos h_1 \cos \varphi}, \quad \cos A_2 = \frac{\sin h_2 \sin \varphi - \sin \delta}{\cos h_2 \cos \varphi}. \quad (35)$$

На эксперименте проводится измерение горизонтальных координат с помощью угломерных приборов, например, теодолита. С помощью таких инструментов достаточно легко добиться корректного измерения высоты светила (необходимо лишь отцентрировать прибор на направление отвесной линии). Гораздо более трудной задачей является точное определение положения точки юга, от которой ведется отсчет азимутального расстояния светила. Однако этой трудности можно

избежать если проводить измерения горизонтальных координат светила через малые промежутки времени (3-5 мин), когда светило, очевидно, находится в одной из четвертей возможных значений  $A$ . В этом случае можно ограничиться определением изменения азимутального расстояния  $\Delta A = A_2 - A_1 > 0$ . Тогда

$$\cos(\Delta A) = \cos(A_2 - A_1) = \cos A_1 \cos A_2 + \sin A_1 \sin A_2, \quad (36)$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos^2(\Delta A) + \cos^2 A_1 \cos^2 A_2 - 2 \cos(\Delta A) \cos A_1 \cos A_2 &= \sin^2 A_1 \sin^2 A_2, \\ \cos^2(\Delta A) - 2 \cos(\Delta A) \cos A_1 \cos A_2 &= 1 - \cos^2 A_1 - \cos^2 A_2, \\ \cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 - 2 \cos(\Delta A) \cos A_1 \cos A_2 &= \sin^2(\Delta A), \end{aligned} \quad (37)$$

из (37) с учетом (35) следует, что

$$\begin{aligned} (\sin h_1 \sin \varphi - \sin \delta)^2 \cos^2 h_2 + (\sin h_2 \sin \varphi - \sin \delta)^2 \cos^2 h_1 - 2 \cos \Delta A \cos h_1 \times \\ \times \cos h_2 (\sin h_1 \sin \varphi - \sin \delta) (\sin h_2 \sin \varphi - \sin \delta) = \sin^2(\Delta A) \cos^2 h_1 \cos^2 h_2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$a \sin^2 \delta - b \sin \delta + c = 0 \quad (38)$$

$$a = \cos^2 h_1 + \cos^2 h_2 - 2 \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} b = 2 \sin \varphi [(\sin h_1 \cos^2 h_2 + \sin h_2 \cos^2 h_1) - \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2 \times \\ \times (\sin h_1 + \sin h_2)], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} c = \sin^2 \varphi (\sin^2 h_1 \cos^2 h_2 + \sin^2 h_2 \cos^2 h_1 - \frac{1}{2} \cos \Delta A \sin 2h_1 \sin 2h_2) - \\ - \cos^2 \varphi \sin^2(\Delta A) \cos^2 h_1 \cos^2 h_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Решение этого уравнения представляется в виде:

$$\begin{aligned} \delta_{\mp} = \arcsin \left[ \frac{b}{2a} \mp \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \right] = \arcsin \left[ \left[ \sin \varphi [(\sin h_1 \cos^2 h_2 + \sin h_2 \times \right. \right. \\ \times \cos^2 h_1) - \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2 (\sin h_1 + \sin h_2)] \mp |\sin \Delta A \cos h_1 \cos h_2| \times \\ \times [(\cos^2 h_1 + \cos^2 h_2 - 2 \cos h_1 \cos h_2 \cos \Delta A) \cos^2 \varphi - (\sin h_1 - \sin h_2)^2 \times \\ \left. \left. \times \sin^2 \varphi \right]^{\frac{1}{2}} \right] / (\cos^2 h_1 + \cos^2 h_2 - 2 \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Оба корня уравнения могут быть физическими. Однако, первый корень отвечает положению тела с  $\delta < \varphi$ , т.е. такой объект должен кульминировать к югу от зенита, а второй корень – положению тела с  $\delta > \varphi$ , т.е. данный объект должен кульминировать к северу от зенита. Для однозначного определения истинного значения склонения небесного тела достаточно лишь один раз пронаблюдать его движение в окрестности меридиана и оценить положение его точки кульминации по отношению к точке зенита. Согласно оценке выбрать соответствующий корень системы решений (42).

**3.-5.** В таблице 2 представлены значения искомым параметров для Юпитера на 14 августа 2000 г. Итоговые результаты исправлены за рефракцию света. Истинному значению склонения Юпитера отвечает решение  $\delta_-$ . В 5-ой и 7-ой колонках таблицы представлены ошибки определения склонения  $\delta$  планеты, вычисленные согласно (32).

Важно отметить, что нефизическое решение  $\delta_+$  обладает значительной "нестабильностью" и наблюдается устойчивая тенденция роста значения корня с увеличением высоты Юпитера над горизонтом.



№ п/п	$h_1$ , град	$h_2$ , град	$\Delta A$ , град	$\delta_-$ , град	$\Delta\delta_-$ , град	$\delta_+$ , град	$\Delta\delta_+$ , град
1	13.896	14.567	0.850	18.062		18.062	
2	17.121	17.742	0.800	20.727		23.263	
3	21.229	21.825	0.767	20.977		33.367	
4	25.475	26.100	0.858	17.264		46.395	
5	29.450	30.250	1.088	21.440		52.438	
6	32.783	33.692	1.300	21.381		59.566	
7	36.083	36.696	0.921	21.975		65.412	
8	40.642	41.333	1.158	22.422		73.404	
9	44.083	44.633	1.083	21.338		78.984	
10	47.525	48.046	1.175	21.990		83.701	
среднее				20.758	1.227	53.459	0.914

Таблица 2: Значения данных наблюдений Юпитера от 14.08.2000 г. и значения  $\delta_{\mp}$  и  $\Delta\delta_{\mp}$ , вычисленные согласно (42) и (32).

Дата	Результаты	наши	Orbits 3.0	АК
14.08.2000	$\delta \pm \Delta\delta$	$20.758 \pm 1.227$	20.781	20.758
	$\varepsilon_{\delta}$ , %	5.91		

Таблица 3: Сводка итоговых результатов для  $\delta$  Юпитера, полученных в настоящей работе, генерируемых программой Orbits 3.0 и приведенных в астрономическом календаре (АК) за указанные даты.

Отметим, что в таблице 3 приведены для сравнения результаты для склонения, генерируемые программой Orbits 3.0 и приведенные в астрономическом календаре (АК) (см. литературу<sup>2</sup>) за указанные даты. Из сопоставления результатов следует, что полученные результаты уверенно согласуются с результатами астрономов-профессионалов. При этом относительная погрешность определения склонения Юпитера составляет 5%. Для уменьшения ошибки определения склонения необходимо увеличить количество измерений горизонтальных координат.

Замечание: Отметим, что предложенный метод был впервые предложен Филипповым Ю.П. (©) и апробирован на большом массиве данных наблюдений для Юпитера, Сатурна, Марса. Исследования показали, что данный метод является эффективным экспресс-методом определения искомой величины, в том случае, когда не требуется очень высокая точность определения  $\delta$ .

Ответ:  $\delta \pm \Delta\delta = 20.758^\circ \pm 1.227^\circ$ . ( $S_{\max} = 15$  баллов).

<sup>2</sup>Астрономический календарь (2000). – Под ред. О.С. Угольникова. – М.: А.Д. Сельянов. – 1999. – 198с.